ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 29, № 147 2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-352-376

УДК 517.977

Некоторые вопросы, связанные с реализацией множеств притяжения с точностью до наперед заданной окрестности

Александр Георгиевич ЧЕНЦОВ

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»
Уральского отделения Российской академии наук
620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16
ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина»
620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

Аннотация. Рассматриваются вопросы, связанные с реализацией множеств притяжения (МП) в абстрактных задачах о достижимости с ограничениями асимптотического характера (ОАХ). Исследуется возможность реализации МП с точностью до произвольной окрестности в классе замыканий множеств достижимости, отвечающих конкретным множествам семейства, порождающего ОАХ. Кроме того, рассматриваются некоторые соотношения для МП, порождаемых различными ОАХ (исследуются условия дизъюнктности МП). Общие конструкции окрестностной реализации МП были применены в случае, когда данные МП рассматривались в пространстве ультрафильтров (у/ф) широко понимаемого измеримого пространства (ИП). В частности, детально исследовался случай, когда ОАХ определяются посредством фильтра; для данного случая, при неограничительных условиях на исходное ИП, в виде МП реализуется множество всех у/ф, мажорирующих исходный фильтр. В данном случае (пространства у/ф) отдельно исследовались варианты оснащения множества у/ф топологиями стоуновского и волмэновского типов.

Ключевые слова: множество притяжения, ограничение асимптотического характера, окрестность, топология

Для цитирования: *Ченцов А.Г.* Некоторые вопросы, связанные с реализацией множеств притяжения с точностью до наперед заданной окрестности // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 147. С. 352–376. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-352-376

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-352-376

Some questions connected with implementation of attraction sets accurate to a predetermined neighborhood

Aleksandr G. CHENTSOV
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation
Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin
19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation

Abstract. Questions connected with implementation of attraction sets (AS) in attainability problem with constraints of asymptotic nature (CAN) are considered. It is investigated the possibility of AS implementation accurate to arbitrary neighborhood in class of closures of attainability sets corresponding to concrete sets from the family generating CAN. Moreover, some relations for AS generated by different CAN are considered (disjunction conditions of AS are investigated). General constructions of neighborhood implementation of AS were applied in the case when these AS were considered in the space of ultrafilters of broadly understood measurable space (MS). In particular, the case when CAN are defined by a filter was investigated in detail; for this case, under non-restrictive conditions on the original MS, the set of ultrafilters majorizing the original filter is implemented as AS. In this case (of ultrafilter space) variants of equipment of ultrafilter set with topologies of Stone and Wallman types are investigated separately.

Keywords: attraction set, constraints of asymptotic nature, neighborhood, topology

Mathematics Subject Classification: 93C83.

For citation: Chentsov A.G. Some questions connected with implementation of attraction sets accurate to a predetermined neighborhood. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:147 (2024), 352–376.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-352-376 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Настоящая статья продолжает исследование [1]. Основным предметом настоящего исследования являются множества притяжения (МП) в задачах о достижимости в топологических пространствах (ТП) с ограничениями асимптотического характера (ОАХ). Упомянутые ОАХ могут возникать при последовательном ослаблении стандартных ограничений (неравенства — в задачах математического программирования; краевые и промежуточные условия, фазовые ограничения — в задачах управления), но могут задаваться и изначально (см., в частности, [2, 3]). Так или иначе возникает непустое семейство множеств в пространстве обычных (доступных для непосредственного применения) решений, которое без потери общности можно считать направленным (двойственно к упорядоченности по включению). Предполагая, что каждому обычному решению (или управлению) сопоставляется точка топологического пространства (ТП), мы имеем некоторое целевое отображение (ЦО). Образы множеств с точками в виде обычных решений (управлений) при действии ЦО можно трактовать как аналоги областей достижимости (ОД) в задачах управления (см. в этой связи [4–6]). Известно, что ослабление стандартных ограничений в задачах управления зачастую приводит к скачкообразному расширению ОД. Возникающее при этом предельное множество, отвечающее семейству ОД при ослабленных условиях, является МП, реализуемым (в задачах об исследовании ОД управляемой системы с конечномерным фазовым пространством) в обычной секвенциальной форме, что соответствует идейно конструкциям на основе приближенных решений Дж. Варги (см. [7, гл. III]) в задачах оптимизации и, в частности, в задачах оптимального управления. Однако подход, связанный с построением МП в задачах о достижимости с ОАХ, является намного более общим; он охватывает, в частности, и уже упоминавшиеся случаи, когда ОАХ не связаны с ослаблением каких-либо стандартных ограничений. С другой стороны, в рамках данного подхода, базирующегося на конструкциях общей топологии, неестественным является и исключительно секвенциальный вариант реализации элементов МП; здесь уже имеет смысл использовать направленности и фильтры в качестве аналогов приближенных решений Дж. Варги. Отметим, что при таком (расширенном) определении МП удается охватить и некоторые, далекие на первый взгляд от ОД управляемых систем, объекты. Так, в [1] указан вариант МП в пространстве ультрафильтров (у/ф) широко понимаемого измеримого пространства (ИП): имеется в виду «совокупность» у/ф, мажорирующих наперед заданный фильтр.

Вместе с тем следует отметить, что МП являются по самому смыслу обобщенными пределами некоторых «настоящих» достижимых множеств (ДМ) (в задачах управления таковыми следует признать замыкания обычных ОД; замыкание здесь выступает в роли несущественной «технической» операции, не связанной с ослаблением стандартных ограничений исходной задачи). Упомянутые ДМ отвечают всякий раз стандартному ограничению на выбор обычного решения (управления) в виде множества из семейства, порождающего ОАХ; при этом соответствующее МП является п/м каждого такого ДМ. Вполне естественным является вопрос о реализации МП в классе ДМ, соответствующих семейству, порождающему ОАХ, с точностью до любой наперед выбранной окрестности исходного МП (т. е. о реализации уже не только в пределе). В этой связи отметим построения [8, § 3.6], естественное развитие которых осуществляется в настоящей работе. В частности, мы рассматриваем, продолжая [1] , данные построения в пространстве у/ф при оснащении топологиями стоуновского и волмэновского типов.

В связи с общими вопросами построения расширений задач о достижимости с ОАХ отметим, что здесь вполне применимы методы, использовавшиеся в случае экстремальных задач и, в частности, задач оптимального управления. Особо отметим подход Дж. Варги (см. [7, гл. III,IV]); в частности, напомним понятия точных, приближенных и обобщенных решений в [7, гл. III]. Отметим исследования Р. В. Гамкрелидзе, касающиеся применения управлений-мер (мерозначных функций) в задачах оптимального управления и, в частности, в задаче быстродействия (см. [9]).

В задачах теории дифференциальных игр Н. Н. Красовский и А. И. Субботин широко использовали конструкции решения с приближенным соблюдением фазовых ограничений в виде сечений стабильных мостов, что позволило установить фундаментальную теорему об альтернативе (см. [10, 11]). Кроме того, в их работах использовались управления-меры на этапе построения программных конструкций для решения нелинейных дифференциальных игр (см. [11]). Отметим в этом направлении также монографию [12] и серию журнальных публикаций в связи с методом программных итераций, где применялись управления-меры.

Для построения расширений в задачах импульсного управления Н. Н. Красовский предложил использовать аппарат обобщенных функций (см. [4, гл. 4,§ 14]), что впоследствии стало основой в конструкциях импульсного управления. Для линейных систем управления с ограничениями импульсного и моментного характера и разрывностью в коэффициентах при управляющих воздействиях (в [2, 3, 8, 13, 14] и ряде других работ) использовались процедуры расширения в классе конечно-аддитивных мер как в случае экстремальных задач, так и в случае задач о достижимости, где с их помощью определялись МП в классе обобщенных управлений. Этот подход получил естественное развитие в виде конструкций, использующих у/ф широко понимаемых ИП (см. [1, 15, 16]).

1. Основные понятия

В статье используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки и др.); $\varnothing$ — пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению, def заменяет фразу «по определению». Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Принимаем аксиому выбора. Если x и y — объекты, то $\{x;y\}$ есть def непустое множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов. Тогда каждому объекту z сопоставляется синглетон $\{z\} \triangleq \{z;z\}$, содержащий $z : z \in \{z\}$. Множества — объекты и, следуя [17, с. 67], полагаем для объектов u и v, что $(u,v) \triangleq \{\{u\};\{u;v\}\}$, получая упорядоченную пару (УП) с первым элементом u и вторым элементом v. Для каждой УП h через $\mathrm{pr}_1(h)$ и $\mathrm{pr}_2(h)$ обозначаем первый и второй элементы h, однозначно определяемые условием $h = (\mathrm{pr}_1(h), \mathrm{pr}_2(h))$.

Множеству H сопоставляем семейство $\mathcal{P}(H)$ всех подмножеств (п/м) H и $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\varnothing\}$ (семейство всех непустых п/м H); $\mathrm{Fin}(H)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$. В качестве H может использоваться семейство. Множеству $\mathbb{M}$ и (непустому) семейству $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$ сопоставляем семейство

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\, \mathbb{M} \setminus M :\ M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M})), \tag{1.1}$$

двойственное к $\mathcal{M}$. Если $\mathcal{A}$ — непустое семейство и B — множество, то

$$\mathcal{A}|_B \triangleq \{\, A \cap B :\ A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B)) \tag{1.2}$$

есть след $\mathcal{A}$ на B. Используем (1.1), (1.2) в конструкциях, связанных с топологией. Если $\mathcal{H}$ — семейство и S — множество, то

$$([\mathcal{H}](S) \triangleq \{H \in \mathcal{H} \mid S \subset H\} \in \mathcal{P}(\mathcal{H}))\&(]\,\mathcal{H}\,[\,(S) \triangleq \{H \in \mathcal{H} \mid H \subset S\} \in \mathcal{P}(\mathcal{H})).$$

Наконец, множеству $\mathbb{X}$ и (непустому) семейству $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{X}))$ сопоставляем семейство

$$(\mathrm{COV})[\mathbb{X} \mid \mathcal{X}] \triangleq \{\chi \in \mathcal{P}'(\mathcal{X}) \mid \mathbb{X} = \bigcup_{X \in \chi} X\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{X}))$$

всех покрытий $\mathbb{X}$ множествами из $\mathcal{X}$. Если P и Q — множества, то Q^P есть def множество всех функций из P в Q (при $f \in Q^P$ и $x \in P$ в виде $f(x) \in Q$ имеем значение функции f в точке x); при $g \in Q^P$ и $C \in \mathcal{P}(P)$ в виде $g^1(C) \triangleq \{g(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(Q)$ имеем образ C при действии g (для прообраза множества $M \in \mathcal{P}(Q)$ при действии g используем стандартное обозначение $g^{-1}(M)$). Если $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — непустые множества и $f \in \mathbb{B}^{\mathbb{A}}$, то

$$\begin{aligned}(f^1[\mathcal{A}] \triangleq \{f^1(A) : A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{B}))\ \ \forall \mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{A})))\\ \&(f^{-1}[\mathcal{B}] \triangleq \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{A}))\ \ \forall \mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{B})));\end{aligned} \tag{1.3}$$

семейства, определяемые в (1.3), называем образом и прообразом соответствующих подсемейств $\mathcal{P}(\mathbb{A})$ и $\mathcal{P}(\mathbb{B})$ соответственно.

Через $\mathbb{R}$ обозначаем вещественную прямую, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$ и

$$\overline{1,n} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant n\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})\ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Мы полагаем, что элементы $\mathbb{N}$, т. е. натуральные числа, множествами не являются. С учетом этого для каждых множества H и числа $n \in \mathbb{N}$ вместо $H^{\overline{1,n}}$ используем более традиционное обозначение H^n для множества всех отображений из $\overline{1,n}$ в H, именуемых далее кортежами («длины» n). В дальнейшем используем индексную форму записи функций (см. [18, с. 20,21]) и, в частности, кортежей.

Специальные семейства. Фиксируем до конца настоящего раздела множество I. В виде

$$\pi[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \mid (\varnothing \in \mathcal{I})\&(I \in \mathcal{I})\&(A \cap B \in \mathcal{I}\ \ \forall A \in \mathcal{I}\ \ \forall B \in \mathcal{I})\} \tag{1.4}$$

имеем семейство всех π-систем [19, с. 14] п/м I с «нулем» и «единицей». Среди всевозможных π-систем из семейства (1.4) выделяем отделимые:

$$\tilde{\pi}^0[I] \triangleq \{\,\mathcal{I} \in \pi[I] \mid \forall L \in \mathcal{I}\ \forall x \in I \setminus L\ \exists \Lambda \in \mathcal{I}:\ (x \in \Lambda)\&(\Lambda \cap L = \varnothing)\}$$

есть семейство всех отделимых π-систем из (1.4). В качестве примера π-системы отметим полуалгебру множеств (см. [20, гл. I]). При этом $\forall \mathcal{L} \in \pi[I]\ \ \forall A \in \mathcal{P}(I)\ \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Delta_n(A, \mathcal{L}) \triangleq \{\,(L_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathcal{L}^n \mid\ (A = \bigcup_{i=1}^{n} L_i)\&(L_p \cap L_q = \varnothing\ \ \forall p \in \overline{1,n}\ \ \forall q \in \overline{1,n} \setminus \{p\})\}$$

(введены упорядоченные конечные разбиения A множествами π-системы $\mathcal{L}$). Тогда

$$\Pi[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[I] \mid \forall J \in \mathcal{I}\ \exists n \in \mathbb{N}:\ \Delta_n(I \setminus J, \mathcal{I}) \neq \varnothing\} \in \mathcal{P}'(\tilde{\pi}^0[I]) \tag{1.5}$$

(заметим, что $\mathcal{P}(I) \in \Pi[I]$). Итак, при $\mathcal{I} \in \Pi[I]$ мы имеем вариант отделимой π-системы; заметим, что $(I, \mathcal{I})$ есть в этом случае измеримое пространство (ИП) с полуалгеброй множеств (алгебры и σ-алгебры п/м I — суть частные случаи полуалгебр). Вообще, при $\mathcal{I} \in \pi[I]$ мы рассматриваем $(I, \mathcal{I})$ как широко понимаемое ИП; отметим. что в этом случае в виде

$$(\mathrm{Cen})[\mathcal{I}] \triangleq \{\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) \mid \bigcap_{Z \in \mathcal{K}} Z \neq \varnothing \quad \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{Z})\}$$

реализуется семейство всех непустых центрированных подсемейств $\mathcal{I}$.

2. Элементы топологии

В настоящем разделе мы сосредоточимся на некоторых представлениях топологических пространств (ТП), так или иначе связанных с вопросами отделимости и свойствами окрестностей. Однако, сначала введем ряд общих обозначений, фиксируя до тех пор, пока не будет оговорено противное, множество I; тогда в виде

$$(\mathrm{top})[I] \triangleq \{\tau \in \pi[I] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\} = \{\tau \in \pi[I] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}(\tau)\}$$

имеем семейство всех топологий на множестве I. При $\tau \in (\mathrm{top})[I]$ в виде (I, τ) имеем ТП, а в виде $\mathbf{C}_I[\tau]$ — семейство всех замкнутых в (I, τ) п/м I; при $x \in I$ полагаем, что $N^0_\tau(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\}$ и

$$N_\tau(x) \triangleq \{H \in \mathcal{P}(I) \mid \exists G \in N^0_\tau(x) : G \subset H\} = \{H \in \mathcal{P}(I) \mid]\, N^0_\tau(x) \,[\, (H) \neq \varnothing\} \tag{2.1}$$

(фильтр [21, гл. I] окрестностей x в ТП (I, τ)), $N^0_\tau(x) = \tau \cap N_\tau(x)$. По аналогии с (2.1) вводим окрестности множеств: если $\tau \in (\mathrm{top})[I]$ и $A \in \mathcal{P}(I)$, то $\mathbf{N}^0_\tau[A] \triangleq \{G \in \tau \mid A \subset G\}$ и

$$\mathbf{N}_\tau[A] \triangleq \{H \in \mathcal{P}(I) \mid \exists G \in \mathbf{N}^0_\tau[A] : G \subset H\} = \{H \in \mathcal{P}(I) \mid]\, \mathbf{N}^0_\tau[A] \,[\, (H) \neq \varnothing\}; \tag{2.2}$$

ясно, что мы получаем два непустых подсемейства $\mathcal{P}(I)$. Конечно, при $\tau \in (\mathrm{top})[I]$ и $x \in I$ имеем равенства

$$(N^0_\tau(x) = \mathbf{N}^0_\tau[\{x\}]) \& (N_\tau(x) = \mathbf{N}_\tau[\{x\}]).$$

Мы полагаем далее, что

$$(\mathcal{D} - \mathrm{top})[I] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid \ \forall x \in I \ \ \forall y \in I \setminus \{x\} \ \ \exists\, G \in N^0_\tau(x) : y \notin G\}, \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered}(\mathrm{top})_0[I] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid \ \forall x \in I \ \ \forall y \in I \setminus \{x\} \\ \exists\, G_1 \in N^0_\tau(x) \ \ \exists G_2 \in N^0_\tau(y) : G_1 \cap G_2 = \varnothing\},\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{top})^0[I] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid \ \forall F \in \mathbf{C}_I[\tau] \ \ \forall x \in I \setminus F \ \ \exists\, G_1 \in \mathbf{N}^0_\tau[F] \\ \exists\, G_2 \in N^0_\tau(x) : G_1 \cap G_2 = \varnothing\},\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$(\mathrm{reg} - \mathrm{top})[I] \triangleq (\mathcal{D} - \mathrm{top})[I] \cap (\mathrm{top})^0[I]. \tag{2.6}$$

В (2.3) имеем семейство всех достижимых топологий на I (т. е. топологий, превращающих I в достижимые [22, с. 191] ТП), в (2.4) — семейство всех хаусдорфовых топологий (T_2 - топологий) на I; (2.5) определяет семейство всех топологий на I, превращающих I в T_3 - пространство; (2.6) — семейство всех топологий на I, реализующих каждая регулярное ТП с «единицей» I. В виде

$$(\mathbf{c}-\mathrm{top})[I] = \{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid \ \forall \xi \in (\mathrm{COV})[I \mid \tau] \ \ \exists \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\xi) : I = \bigcup_{G \in \mathcal{K}} G\}$$
$$= \{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \varnothing \ \ \forall \mathcal{F} \in (\mathrm{Cen})[\mathbf{C}_I[\tau]]\}$$

(мы учитываем, что $\mathbf{C}_I[\tilde{\tau}] \in \pi[I]$ при $\tilde{\tau} \in (\mathrm{top})[I]$) имеем семейство всех топологий, превращающих I в компактное ТП; будем называть такие топологии компактными. Особо выделяем

$$(\mathbf{c}-\mathrm{top})_0[I] \triangleq (\mathbf{c}-\mathrm{top})[I] \cap (\mathrm{top})_0[I];$$

при $\tau \in (\mathbf{c}-\mathrm{top})_0[I]$ называем ТП (I, τ) компактом. При $\tau \in (\mathrm{top})[I]$ в виде

$$(\tau-\mathrm{comp})[I] \triangleq \{K \in \mathcal{P}(I) \mid \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)$$
$$(K \subset \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G) \Rightarrow (\exists\, \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{G}) : K \subset \bigcup_{G \in \mathcal{K}} G)\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I))$$

имеем семейство всех компактных в ТП (I, τ) п/м I (всегда $\varnothing \in (\tau-\mathrm{comp})[I]$). Отметим теперь ряд простых следствий известных определений (2.3)–(2.6), использующих [23, следствие 3.1.5, теорема 3.1.6] и используемых в дальнейшем. Так, в частности,

$$\begin{aligned}(\mathbf{c}-\mathrm{top})[I] &= \{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid \mathbf{N}^0_\tau[\bigcap_{\mathbb{F} \in \mathcal{F}} \mathbb{F}] = \bigcup_{\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{F})} \mathbf{N}^0_\tau[\bigcap_{\mathbb{F} \in \mathcal{K}} \mathbb{F}] \ \ \forall \mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_I[\tau])\} \\ &= \{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid \mathbf{N}_\tau[\bigcap_{\mathbb{F} \in \mathcal{F}} \mathbb{F}] = \bigcup_{\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{F})} \mathbf{N}_\tau[\bigcap_{\mathbb{F} \in \mathcal{K}} \mathbb{F}] \ \ \forall \mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_I[\tau])\}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

В представлении (2.7) проявляется эквивалентность открытых и произвольных (см. [21, гл. I]) окрестностей множеств; по этой причине далее мы будем ограничиваться, как правило, представлениями в терминах открытых окрестностей.

З а м е ч а н и е 2.1. В связи с (2.7) полезно отметить аналогию, касающуюся условий счетной компактности. В этой связи заметим, что

$$(\mathbf{c}_{\mathbb{N}}-\mathrm{top})[I] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid \forall\, (G_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \tau^{\mathbb{N}} \ \ (I = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} G_i) \Rightarrow (\exists\, n \in \mathbb{N} : I = \bigcup_{i=1}^{n} G_i)\}$$

есть семейство всех топологий, превращающих I в счетно компактное ТП. Тогда, используя аналоги конструкции [8, предложение 3.6.2], получаем, что

$$(\mathbf{c}_{\mathbb{N}}-\mathrm{top})[I] = \{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid \mathbf{N}^0_\tau[\bigcap_{i \in \mathbb{N}} F_i] = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{N}^0_\tau[\bigcap_{i=1}^{k} F_i] \ \ \forall\, (F_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbf{C}_I[\tau]^{\mathbb{N}}\}.$$

$\square$

В развитие [23, теорема 3.1.6] отметим весьма очевидное представление

$$(\mathrm{top})_0[I] = \{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid \forall\, K_1 \in (\tau - \mathrm{comp})[I] \;\; \forall\, K_2 \in (\tau \in \mathrm{comp})[I] \\ (K_1 \cap K_2 = \varnothing) \Rightarrow (\exists\, G_1 \in \mathbf{N}^0_\tau[K_1] \;\; \exists\, G_2 \in \mathbf{N}^0_\tau[K_2] : G_1 \cap G_2 = \varnothing)\} \tag{2.8}$$

(в (2.8) имеем понятное свойство: в T_2-пространстве компактные множества ведут себя как точки). Аналогичное представление реализуется для T_3-пространств:

$$(\mathrm{top})^0[I] = \{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid \forall\, A \in (\tau - \mathrm{comp})[I] \\ \forall\, B \in \mathbf{C}_I[\tau] \;\; (A \cap B = \varnothing) \Rightarrow (\exists\, G_1 \in \mathbf{N}^0_\tau[A] \;\; \exists\, G_2 \in \mathbf{N}^0_\tau[B] : G_1 \cap G_2 = \varnothing)\}.$$

Отметим здесь полезное следствие, касающееся аналогичных представлений для регулярных ТП:

$$(\mathrm{reg} - \mathrm{top})[I] = \{\tau \in (\mathcal{D} - \mathrm{top})[I] \mid \forall\, A \in (\tau - \mathrm{comp})[I] \\ \forall\, B \in \mathbf{C}_I[\tau] \;\; (A \cap B = \varnothing) \Rightarrow (\exists\, G_1 \in \mathbf{N}^0_\tau[A] \;\; \exists\, G_2 \in \mathbf{N}^0_\tau[B] : G_1 \cap G_2 = \varnothing)\}.$$

Отметим здесь же, что при $\tau \in (\mathrm{top})[I]$, $n \in \mathbb{N}$ и $(K_i)_{i\in\overline{1,n}} \in (\tau \in \mathrm{comp})[I]^n$

$$\bigcup_{i=1}^{n} K_i \in (\tau \in \mathrm{comp})[I].$$

Тогда из (2.8) извлекается полезное следствие: если $\tau \in (\mathrm{top})_0[I]$, $n \in \mathbb{N}$ и $(K_i)_{i\in\overline{1,n}} \in (\tau - \mathrm{comp})[I]^n$, то

$$(K_r \cap K_s = \varnothing \;\; \forall\, r \in \overline{1,n} \;\; \forall\, s \in \overline{1,n} \setminus \{r\}) \\ \Rightarrow (\exists\, (G_i)_{i\in\overline{1,n}} \in \prod_{i=1}^{n} \mathbf{N}^0_\tau[K_i] : G_r \cap G_s = \varnothing \;\; \forall\, r \in \overline{1,n} \;\; \forall\, s \in \overline{1,n} \setminus \{r\}).$$

Непрерывные и замкнутые отображения.

Фиксируем в настоящем пункте непустые множества X и Y, а также топологии $\tau_1 \in (\mathrm{top})[X]$ и $\tau_2 \in (\mathrm{top})[Y]$. В виде

$$C(X, \tau_1, Y, \tau_2) \triangleq \{f \in Y^X \mid f^{-1}[\tau_2] \subset \tau_1\}$$

имеем множество всех непрерывных в смысле ТП (X, τ_1) и (Y, τ_2) функций из Y^X. Множество всех замкнутых отображений из (X, τ_1) в (Y, τ_2) есть

$$C_{\mathrm{cl}}(X, \tau_1, Y, \tau_2) \triangleq \{f \in C(X, \tau_1, Y, \tau_2) \mid f^1[\mathbf{C}_X[\tau_1]] \subset \mathbf{C}_Y[\tau_2]\}.$$

Наконец, почти совершенные отображения [23, с. 287] из (X, τ_1) в (Y, τ_2) образуют множество

$$C_{\mathbf{ap}}(X, \tau_1, Y, \tau_2) \triangleq \{f \in C_{\mathrm{cl}}(X, \tau_1, Y, \tau_2) \mid f^{-1}(\{y\}) \in (\tau_1 - \mathrm{comp})[X] \;\; \forall\, y \in Y\}.$$

Замыкание.

Если (H, τ) есть ТП, т. е. H — множество и $\tau \in (\mathrm{top})[H]$, а $A \in \mathcal{P}(H)$, то

$$\mathrm{cl}(A, \tau) \triangleq \{h \in H \mid G \cap A \neq \varnothing \;\; \forall\, G \in N^0_\tau(h)\} = \{h \in H \mid S \cap A \neq \varnothing \;\; \forall\, S \in N_\tau(h)\} \\ = \bigcap_{F \in [\mathbf{C}_H[\tau]](A)} F \in [\mathbf{C}_H[\tau]](A),$$

где $[\mathbf{C}_H[\tau]](A) \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_H[\tau])$.

3. Множества притяжения

В настоящем разделе мы обращаемся к проблеме о достижимости в ТП при ограничениях асимптотического характера (ОАХ). Решение данной задачи естественно связать с множеством притяжения (МП), которое по сути является регуляризованным вариантом образа множества. Конкретный вариант данной проблемы можно связать с исследованием области достижимости (ОД) управляемой системы (см. [4, с. 116], [6, раздел 4.2]).

Фиксируем непустое множество E, точки которого называем обычными решениями или обычными управлениями в зависимости от контекста; п/м E могут выступать в качестве способов задания ограничений. Мы допускаем использование в этом качестве и непустых подсемейств $\mathcal{P}(E)$; среди последних будем выделять направленные подсемейства. В виде

$$\beta[E] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \mid \ \forall \Sigma_1 \in \mathcal{E}\ \forall \Sigma_2 \in \mathcal{E}\ \exists \Sigma_3 \in \mathcal{E}:\ \Sigma_3 \subset \Sigma_1 \cap \Sigma_2\} \tag{3.1}$$

имеем семейство всех направленных (двойственно к вложению) подсемейств $\mathcal{P}(E)$. Заметим, что $\beta_0[E] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \beta[E] \mid \varnothing \notin \mathcal{B}\}$ есть семейство всех баз фильтров п/м E; данное семейство играет важную роль в построениях общей топологии (см. [21, гл. I]). Если (X,τ) есть ТП, $X \neq \varnothing$, $f \in X^E$ и $\mathcal{E} \in \beta[E]$, то полагаем, что

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}] \overset{\triangle}{=} \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau); \tag{3.2}$$

мы называем (3.2) МП при ОАХ в виде направленного семейства $\mathcal{E}$ и целевом отображении f (заметим, что МП рассматривались [24, (2.3)] и для случая произвольных непустых подсемейств $\mathcal{P}(E)$, но мы будем ограничиваться вариантом (3.2) для $\mathcal{E} \in \beta[E]$, имея в виду простую связь [24, (2.2),(2.3)] с более общими построениями (см. также [24, предложение 1])). В связи с выбором целевого отображения f в (3.2) напомним одно полезное множество, использовавшееся в [25]: для произвольного ТП $(X,\tau), X \neq \varnothing$,

$$\mathbf{F}^0_{\mathbf{c}}[E;X;\tau] \overset{\triangle}{=} \{f \in X^E \mid f^1(E) \in (\tau-\mathrm{comp})^0[X]\}, \tag{3.3}$$

где $(\tau-\mathrm{comp})^0[X] \overset{\triangle}{=} \{H \in \mathcal{P}(X) \mid \exists\, K \in (\tau-\mathrm{comp})[X] : H \subset K\}$. Последнее понятие содержательно при условии отделимости (X,τ). А именно: для непустого множества X и топологии $\tau \in (\mathrm{top})_0[X]$ (см. (2.4))

$$(\tau-\mathrm{comp})^0[X] = \{H \in \mathcal{P}(X) \mid \mathrm{cl}(H,\tau) \in (\tau-\mathrm{comp})[X]\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)). \tag{3.4}$$

Из (3.2)–(3.4) имеем, конечно, свойство: для непустого множества X, $\tau \in (\mathrm{top})_0[X]$ (т. е. для хаусдорфова ТП $(X,\tau), X \neq \varnothing$), $f \in \mathbf{F}^0_{\mathbf{c}}[E;X;\tau]$ и $\mathcal{E} \in \beta[E]$

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}] \in (\tau-\mathrm{comp})[X] \tag{3.5}$$

(в частности, $(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}] \in \mathbf{C}_X[\tau]$). В связи с (3.3) отметим полезную связь с понятием компактификатора [26] (здесь и ниже $\circ$ используется для обозначения композиции [23, с. 18] функций).

П р е д л о ж е н и е 3.1. *Если K и X — непустые множества, $\tau_1 \in (\mathbf{c}-\mathrm{top})[K]$, $\tau_2 \in (\mathrm{top})[X]$, $m \in K^E$ и $g \in C(K,\tau_1,X,\tau_2)$, то*

$$g \circ m \in \mathbf{F}^0_{\mathbf{c}}[E;X;\tau_2]. \tag{3.6}$$

Доказательство. Фиксируем E, X, τ_1, τ_2, m и g в соответствии с условиями. Тогда $g^1(K) \in (\tau_2 - \text{comp})[X]$ (см. [23, с. 199]) и $(g \circ m)^1(E) \subset g^1(K)$. Тогда $(g \circ m)^1(E) \in (\tau_2 - \text{comp})^0[X]$. Из (3.3) получаем нужное свойство (3.6). $\square$

Предложение 3.2. *Если* $(X, \tau), X \neq \varnothing$, *есть* T_2*-пространство* (т. е. $\tau \in (\text{top})_0[X]$) и $f \in \mathbf{F}^0_{\mathbf{c}}[E; X; \tau]$, то

$$\mathbf{N}^0_\tau[(\text{AS})[E; X; \tau; f; \mathcal{E}]] = \bigcup_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathbf{N}^0_\tau[\text{cl}(f^1(\Sigma), \tau)] \ \ \forall \mathcal{E} \in \beta[E]. \tag{3.7}$$

Доказательство. Будем использовать (2.7). При этом согласно (3.3) для некоторого $\mathbb{K} \in (\tau - \text{comp})[X]$

$$f^1(E) \subset \mathbb{K}. \tag{3.8}$$

Тогда (см. (1.2)) $\tau|_{\mathbb{K}} \in (\mathbf{c} - \text{top})[\mathbb{K}]$ и $(\mathbb{K}, \tau|_{\mathbb{K}})$ — непустой (см. (3.8)) компакт. При этом, в частности, $\mathbb{K} \in \mathbf{C}_X[\tau]$. Пусть $\mathcal{E} \in \beta[E]$; тогда (см. (3.8))

$$\text{cl}(f^1(\Sigma), \tau) \subset \mathbb{K} \ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}.$$

Как следствие получаем, что

$$\text{cl}(f^1(\Sigma), \tau) \in \mathbf{C}_{\mathbb{K}}[\tau|_{\mathbb{K}}] \ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}.$$

В итоге получаем очевидное свойство

$$\mathcal{F} \triangleq \{\text{cl}(f^1(\Sigma), \tau) : \Sigma \in \mathcal{E}\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_{\mathbb{K}}[\tau|_{\mathbb{K}}]). \tag{3.9}$$

Теперь воспользуемся свойством (2.7): имеем равенство

$$\mathbf{N}^0_{\tau|_{\mathbb{K}}}[\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \text{cl}(f^1(\Sigma), \tau)] = \bigcup_{\mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{F})} \mathbf{N}^0_{\tau|_{\mathbb{K}}}[\bigcap_{F \in \mathcal{K}} F].$$

С учетом (3.2) получаем, как следствие, что $(\text{AS})[E; X; \tau; f; \mathcal{E}] \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ и

$$\mathbf{N}^0_{\tau|_{\mathbb{K}}}[(\text{AS})[E; X; \tau; f; \mathcal{E}]] = \bigcup_{\mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{F})} \mathbf{N}^0_{\tau|_{\mathbb{K}}}[\bigcap_{F \in \mathcal{K}} F]. \tag{3.10}$$

Пусть $\mathbb{G} \in \mathbf{N}^0_\tau[(\text{AS})[E; X; \tau; f; \mathcal{E}]]$. Тогда $\mathbb{G} \cap \mathbb{K} \in \mathbf{N}^0_{\tau|_{\mathbb{K}}}[(\text{AS})[E; X; \tau; f; \mathcal{E}]]$ и, согласно (3.9), (3.10) для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $(\Sigma_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathcal{E}^n$

$$\mathbb{G} \cap \mathbb{K} \in \mathbf{N}^0_{\tau|_{\mathbb{K}}}[\bigcap_{i=1}^n \text{cl}(f^1(\Sigma_i), \tau)]. \tag{3.11}$$

При этом (см. (3.1)) рассуждением по индукции устанавливается, что для некоторого $\Xi \in \mathcal{E}$

$$\Xi \subset \bigcap_{i=1}^n \Sigma_i$$

(см. [13, (3.3.16)]). Тогда, как следствие, $\mathrm{cl}(f^1(\Xi),\tau) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathrm{cl}(f^1(\Sigma_i),\tau)$, а потому (см. (3.11)) $\mathrm{cl}(f^1(\Xi),\tau) \subset \mathbb{G}\cap\mathbb{K} \subset \mathbb{G}$; это означает, что $\mathbb{G} \in \mathbf{N}^0_\tau[\mathrm{cl}(f^1(\Xi),\tau)]$ и, тем более,

$$\mathbb{G} \in \bigcup_{\Sigma\in\mathcal{E}} \mathbf{N}^0_\tau[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau)].$$

Поскольку выбор $\mathbb{G}$ был произвольным, установлено вложение

$$\mathbf{N}^0_\tau[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}]] \subset \bigcup_{\Sigma\in\mathcal{E}} \mathbf{N}^0_\tau[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau)]. \tag{3.12}$$

С другой стороны, в силу (3.2) имеем свойство

$$\mathbf{N}^0_\tau[\mathrm{cl}(f^1(\tilde\Sigma),\tau)] \subset \mathbf{N}^0_\tau[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}]] \ \ \forall\tilde\Sigma\in\mathcal{E}.$$

Последнее свойство доставляет вложение, противоположное (3.12), и, следовательно, равенство

$$\mathbf{N}^0_\tau[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}]] = \bigcup_{\Sigma\in\mathcal{E}} \mathbf{N}^0_\tau[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau)].$$

Поскольку выбор $\mathcal{E}$ был произвольным, (3.7) установлено. □

Из (2.1) и предложения 3.2 легко следует свойство: если $(X,\tau), X\neq\varnothing$, есть T_2-пространство, $f\in\mathbf{F}^0_{\mathbf{c}}[E;X;\tau]$ и $\mathcal{E}\in\beta[E]$, то

$$\mathbf{N}_\tau[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}]] = \bigcup_{\Sigma\in\mathcal{E}} \mathbf{N}_\tau[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau)]. \tag{3.13}$$

С учетом (3.2) и (3.13) получаем, конечно, что для всяких T_2-пространства $(X,\tau), X\neq\varnothing$, $f\in\mathbf{F}^0_{\mathbf{c}}[E;X;\tau]$, $\mathcal{E}\in\beta[E]$ и $H\in\mathbf{N}_\tau[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}]]$ непременно

$$\exists\,\Sigma\in\mathcal{E} : (\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}] \subset \mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau) \subset H; \tag{3.14}$$

при этом $\mathbf{N}^0_\tau[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}]] \subset \mathbf{N}_\tau[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}]]$. В (3.14) мы имеем свойство реализуемости МП с точностью до любой наперед выбранной окрестности в классе замыканий образов множеств из семейства $\mathcal{E}$; имеется в виду реализация в виде вилки.

Теорема 3.1. *Если* $(X,\tau), X\neq\varnothing$, *есть* T_2*-пространство* (X — непустое множество и $\tau\in(\mathrm{top})_0[X]$), $f\in\mathbf{F}^0_{\mathbf{c}}[E;X;\tau]$, $\mathcal{E}_1\in\beta[E]$ и $\mathcal{E}_2\in\beta[E]$, то

$$\begin{gathered}((\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_1]\cap(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_2]=\varnothing) \Leftrightarrow (\exists\,\Sigma_1\in\mathcal{E}_1\ \ \exists\,\Sigma_2\in\mathcal{E}_2\\ \exists\,G_1\in\mathbf{N}^0_\tau[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma_1),\tau)]\ \ \exists\,G_2\in\mathbf{N}^0_\tau[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma_2),\tau)] : G_1\cap G_2=\varnothing).\end{gathered} \tag{3.15}$$

Доказательство. Пусть (X,τ), f, $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ удовлетворяют условиям предложения. Тогда, в частности, $f\in X^E$; при этом

$$(\mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau)\in\mathcal{P}(X)\ \ \forall\,\Sigma\in\mathcal{E}_1)\&(\mathrm{cl}(f^1(\tilde\Sigma),\tau)\in\mathcal{P}(X)\ \ \forall\,\tilde\Sigma\in\mathcal{E}_2).$$

Справедливы (см. (3.2), (3.5)) следующие равенства

$$\begin{gathered}((\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_1] = \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}_1} \mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau) \in (\tau-\mathrm{comp})[X])\\ \&((\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_2] = \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}_2} \mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau) \in (\tau-\mathrm{comp})[X]).\end{gathered} \tag{3.16}$$

С учетом предложения 3.2 получаем, что (см. (3.16))

$$\mathbf{N}_\tau^0[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_1]] = \bigcup_{\Sigma\in\mathcal{E}_1} \mathbf{N}_\tau^0[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau)], \tag{3.17}$$

$$\mathbf{N}_\tau^0[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_2]] = \bigcup_{\Sigma\in\mathcal{E}_2} \mathbf{N}_\tau^0[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau)]. \tag{3.18}$$

Далее, из (2.8) и (3.16) вытекает импликация

$$\begin{gathered}((\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_1]\cap(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_2]=\varnothing) \ \Rightarrow \\ (\exists\, G_1\in\mathbf{N}_\tau^0[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_1]] \ \exists\, G_2\in\mathbf{N}_\tau^0[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_2]] : G_1\cap G_2=\varnothing).\end{gathered} \tag{3.19}$$

Пусть истинна посылка импликации (3.19). Тогда для некоторых

$$(\mathbb{G}_1\in\mathbf{N}_\tau^0[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_1]])\&(\mathbb{G}_2\in\mathbf{N}_\tau^0[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_2]]) \tag{3.20}$$

имеем равенство $\mathbb{G}_1\cap\mathbb{G}_2=\varnothing$. В силу (3.17), (3.18) и (3.20) имеем, что для некоторых $\Sigma'\in\mathcal{E}_1$ и $\Sigma''\in\mathcal{E}_2$

$$(\mathbb{G}_1\in\mathbf{N}_\tau^0[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma'),\tau)])\&(\mathbb{G}_2\in\mathbf{N}_\tau^0[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma''),\tau)]).$$

Итак, установлена следующая импликация

$$\begin{gathered}((\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_1]\cap(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_2]=\varnothing) \ \Rightarrow \\ (\exists\,\Sigma_1\in\mathcal{E}_1 \ \exists\,\Sigma_2\in\mathcal{E}_2 \ \exists\, G_1\in\mathbf{N}_\tau^0[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma_1),\tau)] \ \exists\, G_2\in\mathbf{N}_\tau^0[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma_2),\tau)] : G_1\cap G_2=\varnothing).\end{gathered}$$

С учетом (3.16)–(3.18) легко устанавливается (см. определение раздела 2) противоположная импликация, чем и завершается обоснование (3.15). □

П р е д л о ж е н и е 3.3. *Если* X — *непустое множество и* $\tau\in(\mathrm{top})_0[X]$, $f\in\mathbf{F}_{\mathbf{c}}^0[E;X;\tau]$, $\mathcal{E}_1\in\beta[E]$ *и* $\mathcal{E}_2\in\beta[E]$, *то*

$$\begin{gathered}((\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_1]\cap(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_2]=\varnothing) \ \Leftrightarrow \\ (\exists\,\Sigma_1\in\mathcal{E}_1 \ \exists\,\Sigma_2\in\mathcal{E}_2 : \mathrm{cl}(f^1(\Sigma_1),\tau)\cap\mathrm{cl}(f^1(\Sigma_2),\tau)=\varnothing).\end{gathered}$$

Доказательство получается комбинацией (3.2) и теоремы 3.1 Итак, в случае хаусдорфова ТП (X,τ), $X\neq\varnothing$, при $f\in\mathbf{F}_{\mathbf{c}}^0[E;X;\tau]$, $\mathcal{E}_1\in\beta[E]$ и $\mathcal{E}_2\in\beta[E]$ эквивалентны следующие три утверждения:

1) $(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_1]\cap(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_2]=\varnothing$;

2) $\exists\,\Sigma_1\in\mathcal{E}_1 \ \exists\,\Sigma_2\in\mathcal{E}_2 \ \exists\, G_1\in\mathbf{N}_\tau^0[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma_1),\tau)] \ \exists\, G_2\in\mathbf{N}_\tau^0[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma_2),\tau)] : G_1\cap G_2=\varnothing$;

3) $\exists\,\Sigma'\in\mathcal{E}_1 \ \exists\,\Sigma''\in\mathcal{E}_2 : \mathrm{cl}(f^1(\Sigma'),\tau)\cap\mathrm{cl}(f^1(\Sigma''),\tau)=\varnothing$.

В заключении раздела отметим полезное свойство [27, раздел 2]: если (X,τ), $X\neq\varnothing$, и $(K,\mathbf{t})$, $K\neq\varnothing$, — два ТП, $m\in K^E$, $g\in C_{\mathbf{ap}}(K,\mathbf{t},X,\tau)$ и $\mathcal{E}\in\beta[E]$, то

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;g\circ m;\mathcal{E}] = g^1((\mathrm{AS})[E;K;\mathbf{t};m;\mathcal{E}]); \tag{3.21}$$

отметим в этой связи [28, (2.3), предложение 2.1]. В связи с (3.21) отметим следующий вариант условий, при которых данное равенство справедливо: $(X,\tau), X\neq\varnothing$, есть T_1-пространство (X — непустое множество и $\tau\in(\mathcal{D}-\mathrm{top})[X]$), $(K,\mathbf{t})$ — компактное ТП (т. е. $\mathbf{t}\in(\mathbf{c}-\mathrm{top})[K]$), $g\in C_{\mathrm{cl}}(K,\mathbf{t},X,\tau)$ и $\mathcal{E}\in\beta[E]$.

4. Множества притяжения в пространстве ультрафильтров с топологией стоуновского типа

Всюду в настоящем разделе фиксируем $\mathcal{L} \in \Pi[E]$, получая в виде $(E, \mathcal{L})$ ИП с полуалгеброй множеств (в качестве $\mathcal{L}$ может, конечно, использоваться алгебра или σ-алгебра п/м E). Напомним, что (см. (1.5)), в частности, $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$. В виде

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid (\varnothing \notin \mathcal{F})\&(A \cap B \in \mathcal{F}\ \forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F}) \\ \&(\forall F \in \mathcal{F}\ \forall L \in \mathcal{L} : (F \subset L) \Rightarrow (L \in \mathcal{F}))\} \tag{4.1}$$

имеем множество всех фильтров ИП $(E, \mathcal{L})$. Тогда [29, раздел 3]

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) &\stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid\ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} \\ &= \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall L \in \mathcal{L}\ \ (L \cap U \neq \varnothing\ \ \forall U \in \mathcal{U}) \Rightarrow (L \in \mathcal{U})\} \\ &= \{\mathcal{U} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] \mid \forall \mathcal{V} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{V}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{V})\}\end{aligned} \tag{4.2}$$

есть множество всех ультрафильтров (у/ф) ИП $(E, \mathcal{L})$, совпадающее с множеством всех максимальных центрированных подсемейств $\mathcal{L}$. В силу отделимости $\mathcal{L}$ имеем (см. [30, (5.9)]), что

$$(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \stackrel{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} \mid x \in L\} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \ \forall x \in E; \tag{4.3}$$

в (4.3) введены тривиальные у/ф ИП $(E, \mathcal{L})$. Далее, при $L \in \mathcal{L}$ вводим множество

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid L \in \mathcal{U}\} = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid L \cap U \neq \varnothing\ \ \forall U \in \mathcal{U}\}. \tag{4.4}$$

Тогда [29, раздел 3] семейство $(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \{\ \Phi_{\mathcal{L}}(L) :\ \ L \in \mathcal{L}\} \in \pi[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$ является, в частности, (открытой) базой топологии

$$\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] \stackrel{\triangle}{=} \{G \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})) \mid \forall \mathcal{U} \in G\ \ \exists\, L \in \mathcal{U} : \Phi_{\mathcal{L}}(L) \subset G\} \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]; \tag{4.5}$$

в связи с (4.5) см. [28, замечание 5.1]. При этом см. [27, (2.9)]

$$(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \subset \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]]; \tag{4.6}$$

в силу (4.6) получаем, что компакт, определяемый в (4.5), является нульмерным. В силу (4.3) определено отображение

$$(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot] \stackrel{\triangle}{=} ((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x])_{x \in E} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})^E. \tag{4.7}$$

П р е д л о ж е н и е 4.1. *Справедливо свойство*

$$(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot] \in \mathbf{F}^0_{\mathbf{c}}[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]]. \tag{4.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (4.7) имеем, что

$$(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(E) = \{(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] : x \in E\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})). \tag{4.9}$$

Учтем (4.5). При этом (см. (4.5), (4.9))

$$(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(E) \in (\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] - \mathrm{comp})^0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})], \tag{4.10}$$

а потому (см. (3.3), (4.9), (4.10)) имеем требуемое свойство (4.8). $\square$

Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, то заключаем в силу (4.6), что

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{U}\} = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]]. \tag{4.11}$$

□

П р е д л о ж е н и е 4.2. *Если* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ *и* $\Sigma \in \mathcal{E}$, *то*

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma) \in \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]}[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})]. \tag{4.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ и $\Sigma \in \mathcal{E}$. Тогда $\Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma) \in (\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}]$, а потому (см. (4.6), (4.11))

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma) \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] : \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma).$$

Поэтому (см. раздел 2) справедливо (4.12). □

Рассмотрим теперь важный частный случай, когда в качестве непустого подсемейства $\mathcal{L}$ используется фильтр. Итак, пусть $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$. Тогда в силу (4.11)

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{F} \subset \mathcal{U}\} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \Phi_{\mathcal{L}}(F) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]] \tag{4.13}$$

есть семейство всех у/ф ИП $(E, \mathcal{L})$, мажорирующих исходный фильтр $\mathcal{F}$; описание данного семейства (см. [1]) представляет теоретический интерес. Напомним, что [31, (1.20)]

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \mathrm{cl}((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(L), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) = \mathrm{cl}(\{(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] : x \in L\}, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \ \ \forall L \in \mathcal{L}. \tag{4.14}$$

В связи с (4.4), (4.14) напомним, что (см. [1, (2.15)])

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{F} \subset \mathcal{U}\} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \Phi_{\mathcal{L}}(F) \ \ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}). \tag{4.15}$$

Итак, в частности, при $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ определено $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})$, которое может рассматриваться [1, (3.5)] как МП:

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) = (\mathrm{AS})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{F}] \tag{4.16}$$

на самом деле данное свойство реализуется и в более общем случае, но мы сейчас ограничимся (4.16), учитывая, что

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \subset \beta[E], \tag{4.17}$$

что позволяет использовать (3.2) (см. в этой связи (4.16)).

П р е д л о ж е н и е 4.3. *Если* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, *то справедливо равенство*

$$\mathbf{N}^0_{\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]}[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})] = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]}[\Phi_{\mathcal{L}}(F)]. \tag{4.18}$$

Доказательство. Требуемое равенство (4.18) легко извлекается из предложений 3.2, 4.1, а также из (4.14)–(4.16), но мы все же рассмотрим соответствующее рассуждение. Итак, мы рассматриваем (3.2) в случае, когда

$$(X, \tau) = (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]),$$

где $\mathcal{L} \in \Pi[E]$, $f = (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]$ и $\mathcal{E} = \mathcal{F}$. Тогда с учетом предложения 3.2, (4.5), (4.14), (4.16) и (4.17) имеем, что

$$\mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})] = \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}[(\mathrm{AS})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{F}]$$
$$= \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}[\mathrm{cl}((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(F), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E])] = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}[\Phi_{\mathcal{L}}(F)].$$

□

Теперь из (3.14) следует, при упомянутой в последнем доказательстве конкретизации параметров, что $\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})\ \ \forall H \in \mathbf{N}_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})]\ \ \exists F \in \mathcal{F}:$

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(F) \subset H. \tag{4.19}$$

Предложение 4.4. *Если* $\mathcal{F}_1 \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ *и* $\mathcal{F}_2 \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, *то*

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}_1) \cap \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}_2) = \varnothing) \Leftrightarrow (\exists F_1 \in \mathcal{F}_1\ \ \exists F_2 \in \mathcal{F}_2 : F_1 \cap F_2 = \varnothing).$$

Доказательство. Фиксируем $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ в соответствии с условиями предложения. Тогда в силу (4.5), (4.14), (4.16), предложений 3.3 и 4.1 имеем эквивалентность

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}_1) \cap \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}_2) = \varnothing) \Leftrightarrow (\exists F_1 \in \mathcal{F}_1\ \ \exists F_2 \in \mathcal{F}_2 : \Phi_{\mathcal{L}}(F_1) \cap \Phi_{\mathcal{L}}(F_2) = \varnothing). \tag{4.20}$$

Вместе с тем, $\Phi_{\mathcal{L}}(L_1) \cap \Phi_{\mathcal{L}}(L_2) = \Phi_{\mathcal{L}}(L_1 \cap L_2)$ при $L_1 \in \mathcal{L}$ и $L_2 \in \mathcal{L}$. При этом $\Phi_{\mathcal{L}}(\varnothing) = \varnothing$. Пусть $\mathbb{L}_1 \in \mathcal{L}$ и $\mathbb{L}_2 \in \mathcal{L}$. Тогда имеем, что

$$(\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \varnothing) \Rightarrow (\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}_1) \cap \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}_2) = \varnothing). \tag{4.21}$$

Пусть, напротив, $\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}_1) \cap \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}_2) = \varnothing$. Покажем, что выполнено $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \varnothing$. В самом деле, допустим противное: пусть $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \neq \varnothing$. Выберем и зафиксируем $x_* \in \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$. Тогда $\mathcal{V} \triangleq (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x_*] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, $\mathbb{L}_1 \in \mathcal{V}$ и $\mathbb{L}_2 \in \mathcal{V}$, а потому (см. (4.4))

$$\mathcal{V} \in \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}_1) \cap \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}_2),$$

что противоречит предположению. Полученное противоречие доказывает импликацию

$$(\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}_1) \cap \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}_2) = \varnothing) \Rightarrow (\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \varnothing).$$

С учетом (4.21) получаем эквивалентность $(\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}_1) \cap \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}_2) = \varnothing) \Leftrightarrow (\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \varnothing)$. Поскольку $\mathbb{L}_1$ и $\mathbb{L}_2$ выбирались произвольно, имеем $\forall L_1 \in \mathcal{L}\ \ \forall L_2 \in \mathcal{L}$

$$(\Phi_{\mathcal{L}}(L_1) \cap \Phi_{\mathcal{L}}(L_2) = \varnothing) \Leftrightarrow (L_1 \cap L_2 = \varnothing). \tag{4.22}$$

В частности, в (4.22) может использоваться случай, когда $L_1 \in \mathcal{F}_1$ и $L_2 \in \mathcal{F}_2$. Из (4.20) и (4.22) имеем тогда эквивалентность

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}_1) \cap \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}_2) = \varnothing) \Leftrightarrow (\exists F_1 \in \mathcal{F}_1\ \ \exists F_2 \in \mathcal{F}_2 : F_1 \cap F_2 = \varnothing).$$

□

П р е д л о ж е н и е 4.5. *Если* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, *то семейство* $\mathfrak{B}_{\mathcal{F}} \triangleq \{\Phi_{\mathcal{L}}(F) : F \in \mathcal{F}\}$ *есть локальная база окрестностей множества* $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})$ *:*

$$(\mathfrak{B}_{\mathcal{F}} \subset \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})])\&(\forall\, \mathbb{H} \in \mathbf{N}_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})]\ \ \exists\, \mathbb{G} \in \mathfrak{B}_{\mathcal{F}} : \mathbb{G} \subset \mathbb{H}). \tag{4.23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ и рассмотрим семейство $\mathfrak{B}_{\mathcal{F}}$. С учетом предложения 4.2 имеем, что

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{F}} \subset \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})]. \tag{4.24}$$

Пусть $\tilde{\mathbb{H}} \in \mathbf{N}_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})]$. С учетом (2.2) подберем

$$\tilde{\mathbb{G}} \in \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})]$$

со свойством $\tilde{\mathbb{G}} \subset \tilde{\mathbb{H}}$. С учетом (4.18) имеем для некоторого $\tilde{F} \in \mathcal{F}$ включение

$$\tilde{\mathbb{G}} \in \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}[\Phi_{\mathcal{L}}(\tilde{F})].$$

Это означает, что $\Phi_{\mathcal{L}}(\tilde{F}) \in \mathfrak{B}_{\mathcal{F}}$ и при этом $\Phi_{\mathcal{L}}(\tilde{F}) \subset \tilde{\mathbb{G}} \subset \tilde{\mathbb{H}}$. Итак, установлено, что $\exists\, \mathbb{G} \in \mathfrak{B}_{\mathcal{F}} : \mathbb{G} \subset \tilde{\mathbb{H}}$. Поскольку выбор $\tilde{\mathbb{H}}$ был произвольным, мы получаем, что

$$\forall\, \mathbb{H} \in \mathbf{N}_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})]\ \ \exists\, \mathbb{G} \in \mathfrak{B}_{\mathcal{F}} : \mathbb{G} \subset \mathbb{H}.$$

С учетом (4.24) получаем теперь свойство (4.23). □

В заключении раздела отметим один полезный частный случай. А именно: полагаем до конца настоящего раздела, что $\mathcal{L} = \mathcal{P}(E)$. Тогда в виде элементов $\mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ имеем фильтры семейства всех п/м E, что соответствует [21, гл. I]; у/ф из $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ будем называть сейчас стоун-чеховскими. Пусть $\tau \in (\mathrm{top})[E]$ и $x \in E$. Тогда в нашем случае

$$N_\tau(x) \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}), \tag{4.25}$$

причем $N_\tau(x) \subset (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x]$. Стоун-чеховские у/ф из $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid N_\tau(x))$ представляют интерес, т. к. они являются по сути дела усовершенствованными вариантами (4.25). Заметим, что в рассматриваемом случае $\mathcal{L} \in \Pi[E]$, а потому предложения 4.3–4.5 содержат полезную информацию о таких у/ф. Заметим, что в терминах фильтров из $\mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ в рассматриваемом случае вводится [21, гл. I] общее определение сходимости в ТП. При этом (см. (4.3), (4.13))

$$(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid N_\tau(x)),$$

так что мы имеем простой вариант у/ф, мажорирующего фильтр окрестностей точки x в ТП (E, τ) (см. (4.25)).

5. Топология волмэновского типа

Пусть далее $\mathcal{L} \in \pi[E]$ (рассматриваем случай произвольной π-системы; он является более общим в сравнении с ИП предыдущего раздела). Исследуем вопросы окрестностной реализации МП в случае оснащения множества у/ф топологией волмэновского типа. Для ее введения полагаем, что

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H] \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \exists\, U \in \mathcal{U} : U \subset H\}\ \ \forall\, H \in \mathcal{P}(E).$$

Мы сохраняем определения (4.1)–(4.4), (4.7), (4.11) для рассматриваемого более общего случая $\mathcal{L} \in \pi[E]$ (см. в этой связи [31, раздел 2]). Получаем, что

$$\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] \triangleq \{\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C] : C \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}))); \tag{5.1}$$

легко видеть,что семейство (5.1) есть открытая предбаза, порождающая [32, (2.8)] топологию

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})] \cap (\mathcal{D} - \mathrm{top})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})]. \tag{5.2}$$

Итак, $\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle$ есть слабейшая топология $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$, содержащая семейство (5.1);

$$\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] \subset \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle. \tag{5.3}$$

В виде $(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle)$ имеем (непустое) компактное T_1-пространство. Напомним, что (см. [32, с. 80]) при $L \in \mathcal{L}$

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid E \setminus L] = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}(L),$$

а потому $\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid E \setminus L]$ и, как следствие (см. (5.3)),

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle]; \tag{5.4}$$

в самом деле $E \setminus L \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$, а потому

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid E \setminus L] \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]$$

и, следовательно (см. (5.3)),

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid E \setminus L] \in \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle,$$

откуда в силу (1.1) и вытекает (5.4). Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, то согласно (5.4)

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle] \ \ \forall\, \Sigma \in \mathcal{E}. \tag{5.5}$$

Заметим, что из (1.4) рассуждением по индукции следует, что при $\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L})$

$$\bigcap_{L \in \mathcal{K}} L \in \mathcal{L}; \tag{5.6}$$

поэтому определено $\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap\limits_{L \in \mathcal{K}} L) \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}))$.

П р е д л о ж е н и е 5.1. *Если* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, *то*

$$\mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})] = \bigcup_{\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E})} \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{K}} \Sigma)]. \tag{5.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$. Тогда $\mathrm{Fin}(\mathcal{E}) \subset \mathrm{Fin}(\mathcal{L})$; при $\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E})$ справедливо (5.6) и определено (см. (5.4))

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{K}} \Sigma) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle]. \tag{5.8}$$

Заметим здесь же, что согласно (5.5)

$$\mathcal{F} \triangleq \{\Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma) : \Sigma \in \mathcal{E}\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle]). \tag{5.9}$$

Поэтому (см. (2.7), (5.2)) имеем следующую цепочку равенств

$$\mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma)] = \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\bigcap_{\mathbb{F}\in\mathcal{F}} \mathbb{F}] = \bigcup_{\mathcal{K}\in\mathrm{Fin}(\mathcal{F})} \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\bigcap_{\mathbb{F}\in\mathcal{K}} \mathbb{F}]. \tag{5.10}$$

С учетом (4.11) и (5.10) имеем, однако, равенство

$$\mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})] = \bigcup_{\mathcal{K}\in\mathrm{Fin}(\mathcal{F})} \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\bigcap_{\mathbb{F}\in\mathcal{K}} \mathbb{F}]. \tag{5.11}$$

В связи с рассмотрением множества в правой части (5.11) заметим, что (см. (4.1), (4.2), (4.4))

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L_1 \cap L_2) = \Phi_{\mathcal{L}}(L_1) \cap \Phi_{\mathcal{L}}(L_2) \;\; \forall\, L_1 \in \mathcal{L} \;\; \forall\, L_2 \in \mathcal{L}. \tag{5.12}$$

Из (5.12) рассуждением по индукции следует (см. (5.6)), что

$$\bigcap_{L\in\mathcal{K}} \Phi_{\mathcal{L}}(L) = \Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{L\in\mathcal{K}} L) \;\; \forall\, \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L}).$$

Как следствие получаем полезное свойство

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{L\in\mathcal{K}} L) = \bigcap_{L\in\mathcal{K}} \Phi_{\mathcal{L}}(L) \;\; \forall\, \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E}). \tag{5.13}$$

Сравним теперь множества

$$(\mathbb{A} \triangleq \bigcup_{\mathcal{K}\in\mathrm{Fin}(\mathcal{F})} \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\bigcap_{\mathbb{F}\in\mathcal{K}} \mathbb{F}]) \;\&\; (\mathbb{B} \triangleq \bigcup_{\mathcal{K}\in\mathrm{Fin}(\mathcal{E})} \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{L\in\mathcal{K}} L)]). \tag{5.14}$$

Пусть $G' \in \mathbb{A}$. Тогда для некоторого $\mathcal{K}' \in \mathrm{Fin}(\mathcal{F})$ имеем включение

$$G' \in \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\bigcap_{\mathbb{F}\in\mathcal{K}'} \mathbb{F}].$$

Это означает, что $G' \in \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle$ и при этом

$$\bigcap_{\mathbb{F}\in\mathcal{K}'} \mathbb{F} \subset G'. \tag{5.15}$$

По выбору $\mathcal{K}'$ имеем для некоторых $p \in \mathbb{N}$ и $(\mathbb{F}_i)_{i\in\overline{1,p}} \in \mathcal{F}^p$ равенство

$$\mathcal{K}' = \{\mathbb{F}_i : i \in \overline{1,p}\}.$$

С учетом (5.9) можно указать кортеж $(\Sigma_i')_{i\in\overline{1,p}} \in \mathcal{E}^p$ со свойством

$$\mathbb{F}_j = \Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma_j') \;\; \forall\, j \in \overline{1,p}. \tag{5.16}$$

При этом $\mathcal{K}'' \triangleq \{\Sigma'_i : i \in \overline{1,p}\} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E})$ и согласно (5.13) и (5.16)

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{L\in\mathcal{K}''} L) = \Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{i=1}^{p}\Sigma'_i) = \bigcap_{i=1}^{p}\Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma'_i) = \bigcap_{i=1}^{p}\mathbb{F}_i = \bigcap_{\mathbb{F}\in\mathcal{K}'}\mathbb{F}.$$

С учетом (5.15) получаем, как следствие, что

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{L\in\mathcal{K}''} L) \subset G'.$$

Это означает, что справедливо включение

$$G' \in \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{L\in\mathcal{K}''} L)];$$

тем более, $G' \in \mathbb{B}$, чем завершается проверка вложения

$$\mathbb{A} \subset \mathbb{B}. \tag{5.17}$$

Выберем произвольно $G^0 \in \mathbb{B}$, после чего подберем (см. (5.14)) $\mathcal{K}^0 \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E})$ со свойством

$$G^0 \in \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{L\in\mathcal{K}^0} L)]. \tag{5.18}$$

Подберем $q \in \mathbb{N}$ и $(\Xi_i)_{i\in\overline{1,q}} \in \mathcal{E}^q$ со свойством

$$\mathcal{K}^0 = \{\Xi_i : i \in \overline{1,q}\} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E}). \tag{5.19}$$

Из (5.9) вытекает с очевидностью, что

$$(\Phi_{\mathcal{L}}(\Xi_i))_{i\in\overline{1,q}} \in \mathcal{F}^q,$$

а потому реализуется следующее свойство

$$\mathcal{K}_0 \triangleq \{\Phi_{\mathcal{L}}(\Xi_i) : i \in \overline{1,q}\} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{F}).$$

При этом согласно (5.13) и (5.19)

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{L\in\mathcal{K}^0} L) = \bigcap_{L\in\mathcal{K}^0}\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \bigcap_{i=1}^{q}\Phi_{\mathcal{L}}(\Xi_i) = \bigcap_{\mathbb{F}\in\mathcal{K}_0}\mathbb{F}.$$

Тогда в силу (5.18) получаем вложение $\bigcap_{\mathbb{F}\in\mathcal{K}_0}\mathbb{F} \subset G^0$, а потому $G^0 \in \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\bigcap_{\mathbb{F}\in\mathcal{K}_0}\mathbb{F}]$. Тем более (см. (5.14)) $G^0 \in \mathbb{A}$. Получили, что $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$, а потому (см. (5.17)) $\mathbb{A} = \mathbb{B}$. С учетом (5.11) и (5.14) получаем теперь цепочку равенств

$$\mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})] = \mathbb{B} = \bigcup_{\mathcal{K}\in\mathrm{Fin}(\mathcal{E})}\mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{L\in\mathcal{K}} L)],$$

означающую справедливость (5.7). □

Следствие 5.1. *Если семейство* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ *является направленным, т. е.*

$$\forall \Sigma_1 \in \mathcal{E} \;\; \forall \Sigma_2 \in \mathcal{E} \;\; \exists \Sigma_3 \in \mathcal{E} : \Sigma_3 \subset \Sigma_1 \cap \Sigma_2, \tag{5.20}$$

то справедливо равенство

$$\mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})] = \bigcup_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma)]. \tag{5.21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ и выполнено (5.20). Тогда рассуждением по индукции получаем, что $\forall m \in \mathbb{N} \;\; \forall (\Sigma_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathcal{E}^m \;\; \exists \tilde{\Sigma} \in \mathcal{E}$

$$\tilde{\Sigma} \subset \bigcap_{i=1}^{m} \Sigma_i. \tag{5.22}$$

Из (5.22) вытекает очевидное следствие

$$\forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E}) \;\; \exists \tilde{\Sigma} \in \mathcal{E} : \tilde{\Sigma} \subset \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{K}} \Sigma. \tag{5.23}$$

Далее, из (4.1), (4.2), (4.4) вытекает, что $\forall L_1 \in \mathcal{L} \;\; \forall \mathcal{L}_2 \in \mathcal{L}$

$$(L_1 \subset L_2) \Rightarrow (\Phi_{\mathcal{L}}(L_1) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(L_2)). \tag{5.24}$$

В качестве L_1 и L_2 в (5.24) могут использоваться множества из $\mathcal{E}$. Возвращаясь к предложению 5.1, рассмотрим семейство в правой части (5.7), учитывая свойство (5.6). Итак, пусть

$$(\tilde{\mathbb{A}} \triangleq \bigcup_{\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E})} \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{K}} \Sigma)])\&(\tilde{\mathbb{B}} \triangleq \bigcup_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma)]). \tag{5.25}$$

При этом $\{\Sigma\} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E})$ в случае $\Sigma \in \mathcal{E}$. Поэтому $\tilde{\mathbb{B}} \subset \tilde{\mathbb{A}}$. Осталось установить вложение

$$\tilde{\mathbb{A}} \subset \tilde{\mathbb{B}}. \tag{5.26}$$

Выберем произвольно $\Gamma \in \tilde{\mathbb{A}}$. Тогда для некоторого $\mathfrak{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E})$

$$\Gamma \in \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{\Sigma \in \mathfrak{K}} \Sigma)].$$

Это означает, что $\Gamma \in \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle$ и при этом

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{\Sigma \in \mathfrak{K}} \Sigma) \subset \Gamma. \tag{5.27}$$

С учетом (5.23) подберем множество $\Xi \in \mathcal{E}$ со свойством

$$\Xi \subset \bigcap_{\Sigma \in \mathfrak{K}} \Sigma. \tag{5.28}$$

Здесь $\Xi \in \mathcal{L}$ и $\bigcap\limits_{\Sigma \in \mathfrak{K}} \Sigma \in \mathcal{L}$ (см. (5.6)). Из (5.24) и (5.28) получаем поэтому, что

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\Xi) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{\Sigma \in \mathfrak{K}} \Sigma),$$

а тогда с учетом (5.27) получаем вложение

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\Xi) \subset \Gamma,$$

что означает свойство $\Gamma \in \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\Phi_{\mathcal{L}}(\Xi)]$. По выбору Ξ имеем из (5.25), что $\Gamma \in \tilde{\mathbb{B}}$, чем и завершается проверка (5.26), а следовательно, и равенства $\tilde{\mathbb{A}} = \tilde{\mathbb{B}}$. Из предложения 5.1 и (5.25) имеем, однако, равенство

$$\mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})] = \tilde{\mathbb{A}},$$

а потому $\mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})] = \tilde{\mathbb{B}}$. С учетом второго определения в (5.25) получаем, как следствие, требуемое равенство (5.21). □

Из (4.1) и следствия 5.1 получаем, конечно, свойство: $\forall\,\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$

$$\mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})] = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\Phi_{\mathcal{L}}(F)]. \tag{5.29}$$

Из (5.29) вытекает, с очевидностью, что $\forall\,\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ $\forall\,G \in \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})]$ $\exists\,F \in \mathcal{F}:$

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(F) \subset G; \tag{5.30}$$

в (5.30) имеем естественный аналог (4.19).

З а м е ч а н и е 5.1. Напомним, что (см. [27, теорема 7.1]) при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ и $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$

$$(\mathrm{AS})[E; \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}); \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{F}] = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}).$$

Итак, в данном (весьма общем) случае $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})$ есть МП в пространстве у/ф отделимой π-системы в оснащении топологией волмэновского типа.

6. Некоторые добавления

Сейчас мы рассмотрим тот случай, когда при $\mathcal{L} \in \pi[E]$ в качестве непустого подсемейства $\mathcal{L}$ мы располагаем базой фильтра (БФ) широко понимаемого ИП $(E, \mathcal{L})$. Итак, пусть (см. раздел 3)

$$\beta^0_{\mathcal{L}}[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \beta_0[E] \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{L}\}. \tag{6.1}$$

В (6.1) введено множество всех БФ упомянутого типа; ясно, что

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \subset \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \subset \beta^0_{\mathcal{L}}[E] \subset \beta_0[E].$$

Кроме того, отметим, что, как легко видеть, при $\mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{L}}[E]$

$$(E - \mathbf{fi})[\mathcal{B} \mid \mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} \mid \exists\,B \in \mathcal{B} : B \subset L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \tag{6.2}$$

(фильтр, порожденный базой). Заметим, что $\beta^0_{\mathcal{L}}[E] \subset \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ и определено множество $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{B}) \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}))$ при $\mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{L}}[E]$. Вполне очевидно следующее

П р е д л о ж е н и е 6.1. *Если* $\mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{L}}[E]$, *то*

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{B}) = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B} \mid \mathcal{L}]). \tag{6.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{L}}[E]$. Из (6.1), (6.2) $\mathcal{B} \subset (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B} \mid \mathcal{L}]$. Поэтому (см. (4.11), (4.13), (6.3)) имеем очевидное вложение

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B} \mid \mathcal{L}]) \subset \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{B}). \tag{6.4}$$

Пусть $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{B})$. Тогда в силу (4.11) имеем, что $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ и при этом

$$\mathcal{B} \subset \mathfrak{U}. \tag{6.5}$$

Тогда в силу (4.1), (4.2) и (6.5) имеем с очевидностью $\forall\, B \in \mathcal{B}\ \ \forall\, L \in \mathcal{L}$

$$(B \subset L) \Rightarrow (L \in \mathfrak{U}). \tag{6.6}$$

Пусть $\tilde{V} \in (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B} \mid \mathcal{L}]$. Тогда в силу (6.2) $\tilde{V} \in \mathcal{L}$ и для некоторого $\tilde{B} \in \mathcal{B}$ имеет место вложение

$$\tilde{B} \subset \tilde{V}. \tag{6.7}$$

Тогда из (6.6), (6.7) получаем, что $\tilde{V} \in \mathfrak{U}$. Тем самым установлено вложение

$$(E - \mathbf{fi})[\mathcal{B} \mid \mathcal{L}] \subset \mathfrak{U},$$

откуда согласно (4.11) вытекает, что $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B} \mid \mathcal{L}])$. Поскольку выбор $\mathfrak{U}$ был произвольным, установлено, что

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{B}) \subset \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B} \mid \mathcal{L}]).$$

С учетом (6.4) получаем требуемое равенство (6.3). □

Ниже мы отметим один из полезных вариантов использования предложения 6.1. Итак, пусть $\mathcal{M} \in \pi[E]$ и при этом

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{L}. \tag{6.8}$$

Итак, $\mathcal{M}$ есть π-система, являющаяся подсемейством $\mathcal{L}$. Отметим одно очевидное положение.

П р е д л о ж е н и е 6.2. *Справедливо свойство* $\mathbb{F}^*(\mathcal{M}) \subset \beta^0_{\mathcal{L}}[E]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M})$. Тогда (см. (4.1)) $\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{M})$ и, в частности, $\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ согласно (6.8). Далее, из (4.1) имеем, что $\varnothing \notin \mathcal{F}$ и, кроме того,

$$A \cap B \in \mathcal{F}\ \ \forall\, A \in \mathcal{F}\ \ \forall\, B \in \mathcal{F}. \tag{6.9}$$

Тогда, в частности, $\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и с учетом (3.1) и (6.9),

$$\mathcal{F} \in \beta[E] : \varnothing \notin \mathcal{F}.$$

Тогда $\mathbb{F}^*(\mathcal{M}) \subset \beta_0[E]$ и, как следствие, имеет место $\mathbb{F}^*(\mathcal{M}) \subset \beta^0_{\mathcal{L}}[E]$; требуемое свойство установлено.

Из (6.2) и предложения 6.2 вытекает, что при $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M})$ определен фильтр

$$(E - \mathbf{fi})[\mathcal{F} \mid \mathcal{L}] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$$

и согласно предложению 6.1 $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid (E - \mathbf{fi})[\mathcal{F} \mid \mathcal{L}])$. Учтем следствие 5.1. Однако, прежде заметим, что при $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M})$ имеем $\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, причем

$$\forall\, \Sigma_1 \in \mathcal{F} \;\; \forall\, \Sigma_2 \in \mathcal{F} \;\; \exists\, \Sigma_3 \in \mathcal{F} : \Sigma_3 \subset \Sigma_1 \cap \Sigma_2. \tag{6.10}$$

$\square$

З а м е ч а н и е 6.1. Проверим данное (очевидное) свойство, фиксируя $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M})$. Тогда в силу предложения 6.2 $\mathcal{F} \in \beta^0_{\mathcal{L}}[E]$, т. е. $\mathcal{F} \in \beta_0[E]$ и при этом $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$. Далее, из определений раздела 3 следует, что $\mathcal{F} \in \beta[E]$, а тогда $\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и справедливо (6.10). Поскольку $\mathcal{F} \neq \varnothing$, то $\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$; итак, требуемое свойство установлено.

Теперь согласно следствию 5.1 имеем (см. (6.10)), что

$$\mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})] = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\Phi_{\mathcal{L}}(F)] \;\; \forall\, \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M}). \tag{6.11}$$

Напомним (4.11) в связи с (6.10): при $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M})$ справедливо равенство

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \Phi_{\mathcal{L}}(F).$$

Тогда из (6.11) получаем, что $\forall\, \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M}) \;\; \forall \mathbb{G} \in \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})] \;\; \exists\, \tilde{F} \in \mathcal{F}:$

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(\tilde{F}) \subset \mathbb{G};$$

итак, для общего случая широко понимаемого ИП $(E, \mathcal{L})$ мы получили «волмэновский» вариант реализации множества $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})$ (см. замечание 5.1) в классе множеств $\Phi_{\mathcal{L}}(F)$, $F \in \mathcal{F}$, с точностью до любой наперед выбранной окрестности.

References

[1] А. Г. Ченцов, “О топологических свойствах множества притяжения в пространстве ультрафильтров”, *Вестник российских университетов. Математика*, **23**:143 (2023), 335–356. [A. G. Chentsov, “About topological properties of attraction set in ultrafilter space”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 335–356 (In Russian)].

[2] А. Г. Ченцов, А. П. Бакланов, “Об одной задаче асимптотического анализа, связанной с построением области достижимости”, *Оптимальное управление*, Сборник статей. К 105-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Труды МИАН, **291**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2015, 292–311; англ. пер.:A. G. Chentsov, A. P. Baklanov, “On an asymptotic analysis problem related to the construction of an attainability domain”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **291** (2015), 279–298.

[3] А. Г. Ченцов, А. П. Бакланов, “Об одной задаче, связанной с асимптотической достижимостью в среднем”, *Доклады РАН*, **459**:6 (2014), 672–676; англ. пер.:A. G. Chentsov, A. P. Baklanov, “A problem related to asymptotic attainability in the mean”, *Dokl. Math.*, **90** (2014), 762–765.

[4] Н. Н. Красовский, *Теория управления движением*, Наука, М., 1986. [N. N. Krasovsky, *Motion Control Theory*, Nauka Publ., M., 1986 (In Russian)].

[5] Н. Н. Красовский, *Игровые задачи о встрече движений*, Наука, М., 1970. [N. N. Krasovsky, *Game Problems About Meeting of Movements*, Nauka Publ., Moscow, 1970 (In Russian)].

[6] А. И. Панасюк, В. И. Панасюк, *Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем*, Наука и техника, Минск, 1986. [A. I. Panasyuk, V. I. Panasyuk, *Asymptotic Turnpike Optimization of Control Systems*, Science and Technology Publ., Minsk, 1986 (In Russian)].

[7] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977, 624 с. [J. Varga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (In Russian), 624 pp.]

[8] A. G. Chentsov, S. I. Morina, *Extensions and Relaxations*, Mathematics and Its Applications, **542**, Springer Dordrecht, Boston; London, 2002.

[9] Р. В. Гамкрелидзе, *Основы оптимального управления*, Издательство Тбилисского университета, Тбилиси, 1975. [R. V. Gamkrelidze, *Fundamentals of Optimal Control*, Tbilisi University Publishing House, Tbilisi, 1975 (In Russian)].

[10] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, “Альтернатива для игровой задачи сближения”, *Прикладная математика и механика*, **34**:6 (1970), 1005–1022; англ. пер.:N. N. Krasovskii, A. I. Subbotin, “An alternative for the game problem of convergence”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **34**:6 (1970), 948–965.

[11] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, *Позиционные дифференциальные игры*, Наука, М., 1974. [N. N. Krasovsky, A. I. Subbotin, *Positional Differential Games*, Nauka Publ., Moscow, 1974 (In Russian)].

[12] А. И. Субботин, А. Г. Ченцов, *Оптимизация гарантии в задачах управления*, Наука, М., 1981. [A. I. Subbotin, A. G. Chentsov, *Optimization of Guarantee in Control Problems*, Nauka Publ., Moscow, 1981 (In Russian)].

[13] A. G. Chentsov, *Asymptotic Attainability*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1997.

[14] A. G. Chentsov, *Finitely Additive Measures and Relaxations of Extremal Problems*, Plenum, New York, 1996.

[15] А. Г. Ченцов, “Ультрафильтры измеримых пространств как обобщенные решения в абстрактных задачах о достижимости”, Тр. ИММ УрО РАН, **17**, №1, 2011, 268–293; англ. пер.A. G. Chentsov, “Ultrafilters of measurable spaces as generalized solutions in abstract attainability problems”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **275**:suppl. 1 (2011), 12–39.

[16] А. Г. Ченцов, “Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2011, №1, 113–142. [A. G. Chentsov, “Filters and ultrafilters in the constructions of attraction sets”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2011, №1, 113–142 (In Russian)].

[17] К. Куратовский, А. Мостовский, *Теория множеств*, Мир, М., 1970. [K. Kuratovsky, A. Mostovsky, *Set Theory*, Mir Publ., Moscow, 1970 (In Russian)].

[18] А. Г. Ченцов, *Элементы конечно-аддитивной теории меры. I*, УГТУ-УПИ, Екатеринбург, 2008, 388 с. [A. G. Chentsov, *Elements of Finitely Additive Measure Theory. I*, USTU-UPI, Ekaterinburg, 2008 (In Russian), 388 pp.]

[19] А. В. Булинский, А. Н. Ширяев, *Теория случайных процессов*, Физматлит, М., 2005. [A. V. Bulinsky, A. N. Shiryaev, *Theory of Random Processes*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2005 (In Russian)].

[20] Ж. Невё, *Математические основы теории вероятностей*, Мир, М., 1969. [J. Neve, *Mathematical Foundations of Probability Theory*, Mir Publ., Moscow, 1969 (In Russian)].

[21] Н. Бурбаки, *Общая топология. Основные структуры*, Наука, М., 1968, 279 с. [N. Bourbaki, *General Topology. Basic Structures*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (In Russian), 279 pp.]

[22] Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян, *Общая топология*, Высшая школа, М., 1979. [R. A. Alexandryan, E. A. Mirzakhanyan, *General Topology*, Higher School Publ., Moscow, 1979 (In Russian)].

[23] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986. [R. Engelking, *General Topology*, Mir Publ., Moscow, 1986 (In Russian)].

[24] А. Г. Ченцов, "Замкнутые отображения и построение моделей расширения", Тр. ИММ УрО РАН, **29**, 2023, 274–295; англ. пер.:A. G. Chentsov, "Closed mappings and construction of extension models", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **323**:suppl. 1 (2023), 56–77.

[25] A. G. Chentsov, E. G. Pytkeev, "Constraints of asymptotic nature and attainability problems", *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **29**:4 (2019), 569–582. [A. G. Chentsov, E. G. Pytkeev, "Constraints of asymptotic nature and attainability problems", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **29**:4 (2019), 569–582 (In Russian)].

[26] А. Г. Ченцов, "Компактификаторы в конструкциях расширений задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера", Тр. ИММ УрО РАН, **22**, № 1, 2016, 294–309; англ. пер.:A. G. Chentsov, "Compactifiers in extension constructions for reachability problems with constraints of asymptotic nature", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **296**:suppl. 1 (2017), 102–118.

[27] А. Г. Ченцов, "Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы: основные свойства и топологические конструкции", *Известия института математики и информатики УдГУ*, **52** (2018), 86–102. [A. G. Chentsov, "Ultrafilters and maximal linked systems: basic properties and topological constructions", *Izv. IMI UdGU*, **52** (2018), 86–102 (In Russian)].

[28] А. Г. Ченцов, "Ярусные отображения и преобразования на основе ультрафильтров", Тр. ИММ УрО РАН, **18**, № 4, 2012, 298–314. [A. G. Chentsov, "Tier mappings and ultrafilter-based transformations", Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **18**, no. 4, 2012, 298–314 (In Russian)].

[29] А. Г. Ченцов, "Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем", Выпуск посвящен 70-летнему юбилею Александра Георгиевича Ченцова, Тр. ИММ УрО РАН, **24**, 2018, 257–272; англ. пер.:A. G. Chentsov, "Bitopological spaces of ultrafilters and maximal linked systems", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **305**:suppl. 1 (2019), S24–S39.

[30] А. Г. Ченцов, "Некоторые свойства ультрафильтров, связанные с конструкциями расширений", *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **1** (2014), 87–101. [A. G. Chentsov, "Some ultrafilter properties connected with extension constructions", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2014, № 1, 87–101 (In Russian)].

[31] А. Г. Ченцов, "К вопросу о реализации элементов притяжения в абстрактных задачах о достижимости", *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **25**:2 (2015), 212–229. [A. G. Chentsov, "To question about realization of attraction elements in abstract attainability problems", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **25**:2 (2015), 212–229 (In Russian)].

[32] А. Г. Ченцов, "О суперкомпактности пространства ультрафильтров с топологией волмэновского типа", *Известия института математики и информатики УдГУ*, **54** (2019), 74–101. [A. G. Chentsov, "On the supercompactness of ultrafilter space with the topology of Wallman type", *Izv. IMI UdGU*, **54** (2019), 74–101 (In Russian)].

Информация об авторе

Ченцов Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; профессор, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: chentsov@imm.uran.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6568-0703

Поступила в редакцию 23.05.2024 г.
Поступила после рецензирования 02.09.2024 г.
Принята к публикации 13.09.2024 г.

Information about the author

Aleksandr G. Chentsov, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; Professor, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: chentsov@imm.uran.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6568-0703

Received 23.05.2024
Reviewed 02.09.2024
Accepted for press 13.09.2024